AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość Elementów Maszyn

Wykład Nr 3

Zginanie ze ścinaniem

studium przypadków; naprężenia wywołane siłą poprzeczną; naprężenia zredukowane przy zginaniu ze ścinaniem; obliczenia wytrzymałościowe spoin wzdłużnych; przykłady obliczeniowe.

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Projektowania i Eksploatacji Maszyn

dr hab. inż. Tomasz Machniewicz, prof. AGH

machniew@agh.edu.pl

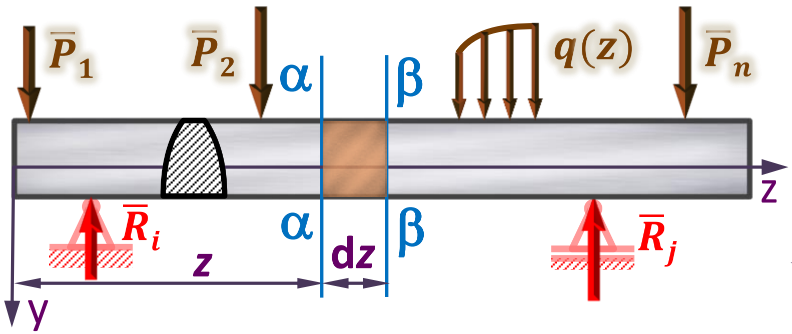
3.1. Zginanie ze ścinaniem – studium przypadków

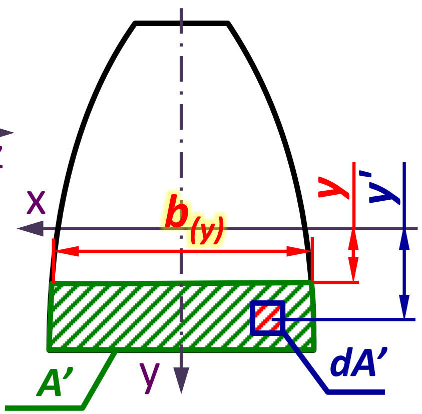
Dlaczego drzewa pękają w ten sposób?

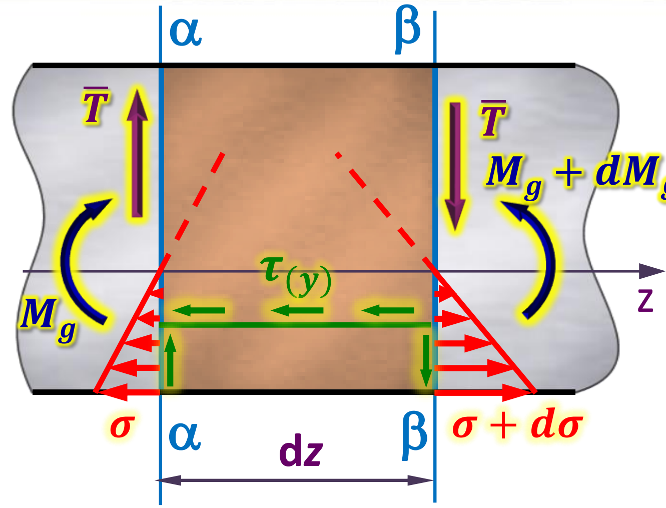
Dlaczego resory składają się z wielu piór ?

Czy „resor” o identycznych wymiarach zewnętrznych wykonany jako lity element posiadałby taką samą sztywność?

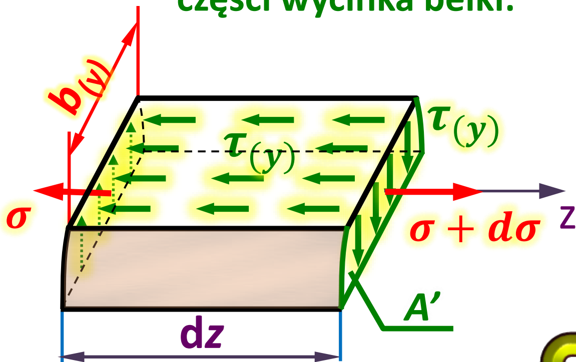
3.2. Naprężenia styczne wywołane siłą poprzeczną







Warunek równowagi statycznej odciętej części wycinka belki:

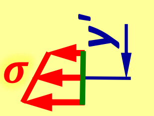


$$\Sigma P_{iz} = 0 \Rightarrow \boxed{-\int_{A'} \sigma\, dA' + \int_{A'} (\sigma + d\sigma) dA' - \tau_{(y)} \cdot b_{(y)} \cdot dz = 0}$$

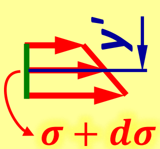
$$\cancel{-\frac{M_g}{J_x}\int_{A'} y'\, dA'} + \cancel{\frac{M_g}{J_x}\int_{A'} y'\, dA'} + \frac{dM_g}{J_x}\underbrace{\boxed{\int_{A'} y'\, dA'}}_{S_{x(y)}} - \tau_{(y)} \cdot b_{(y)} \cdot dz = 0$$

$$\frac{dM_g \cdot S_{x(y)}}{J_x} - \tau_{(y)} \cdot b_{(y)} \cdot dz = 0 \Rightarrow \tau_{(y)} = \overbrace{\boxed{\frac{dM_g}{dz}}}^{T} \cdot \frac{S_{x(y)}}{J_x \cdot b_{(y)}}$$

$$\boxed{\tau_{(y)} = \frac{T \cdot S_{x(y)}}{J_x \cdot b_{(y)}}}$$

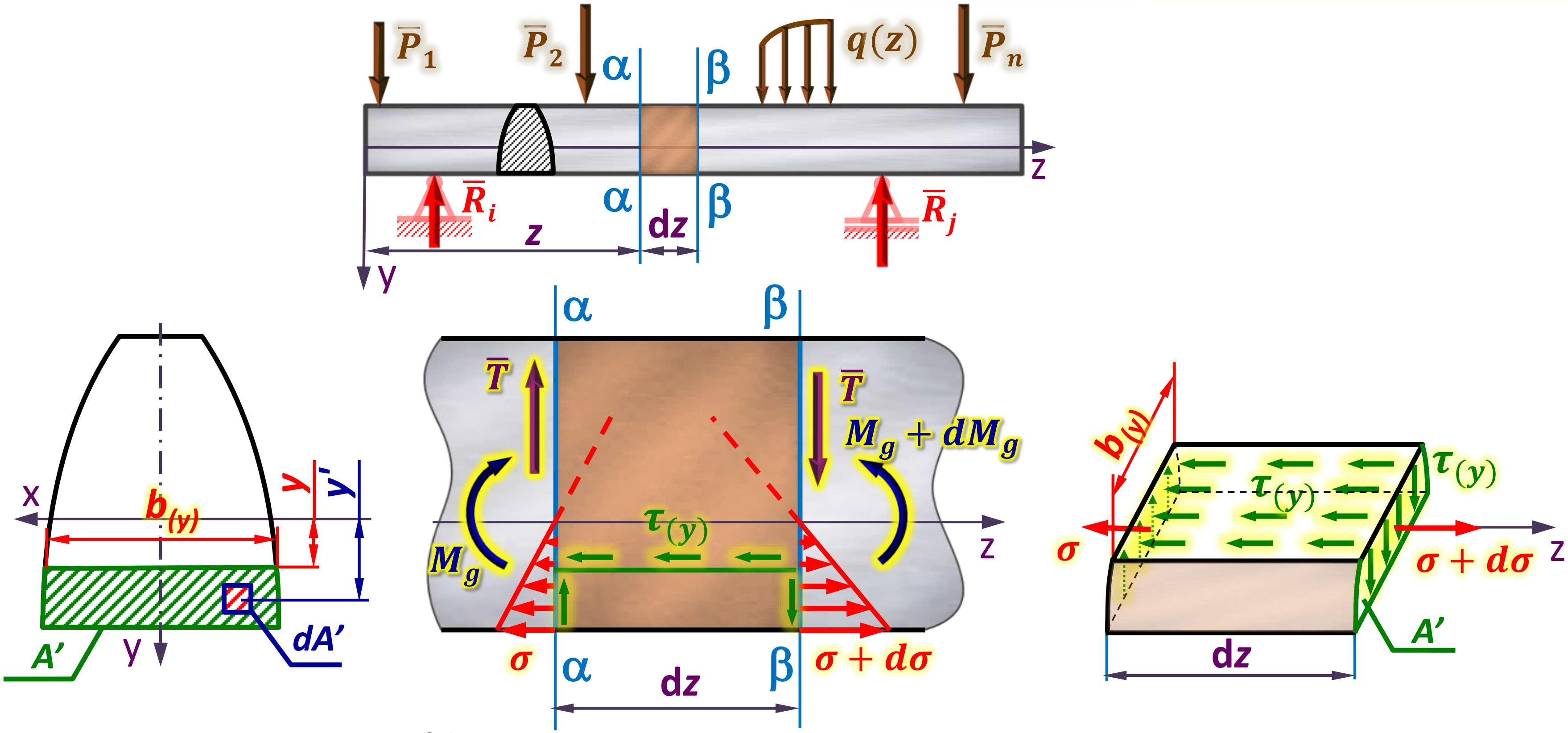


$$\Rightarrow \sigma = \frac{M_g}{J_x} y'$$



$$\Rightarrow (\sigma + d\sigma) = \frac{M_g + dM_g}{J_x} y'$$

3.2. Naprężenia styczne wywołane siłą poprzeczną



$$\tau_{(y)} = \frac{T \cdot S_{x(y)}}{J_x \cdot b_{(y)}}$$

Gdzie:

$\tau_{(y)}$ – naprężenia styczne w odległości y od osi obojętnej belki,

T – siła poprzeczna w rozważanym przekroju belki,

$S_{x(y)}$ – moment statyczny względem osi obojętnej x części przekroju poprzecznego belki odciętej współrzędną y,

J_x – moment bezwładności całego przekroju poprzecznego belki względem osi obojętnej,

T – siła poprzeczna w rozważanym przekroju belki,

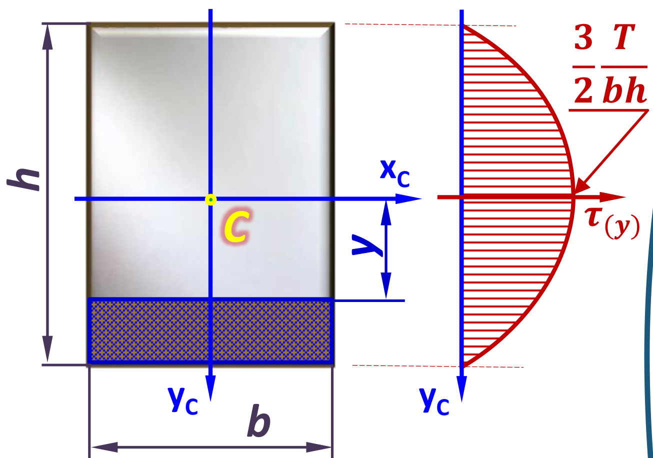
$b_{(y)}$ – szerokość przekroju poprzecznego belki na współrzędnej y.

3.3. Naprężenia styczne wywołane siłą poprzeczną - przykłady

Przykład 3.1:

Wyznaczyć rozkład naprężeń stycznych w belce o przekroju prostokątnym (***b***x***h***), w którym działa działa siła poprzeczna ***T***.

<u>Dane:</u> ***T, b, h***　　　　<u>Szukane:</u> τ(y)



$$\tau_{(y)}=\frac{T\cdot S_{x(y)}}{J_x\cdot b_{(y)}}\qquad J_x=\frac{b\cdot h^3}{12}\qquad b_{(y)}=b$$

$$S_{x(y)}=b\cdot\left(\frac{h}{2}-y\right)\cdot\left(y+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}-y\right)\right)=b\cdot\left(\frac{h}{2}-y\right)\cdot\left(\frac{y}{2}+\frac{h}{4}\right)$$

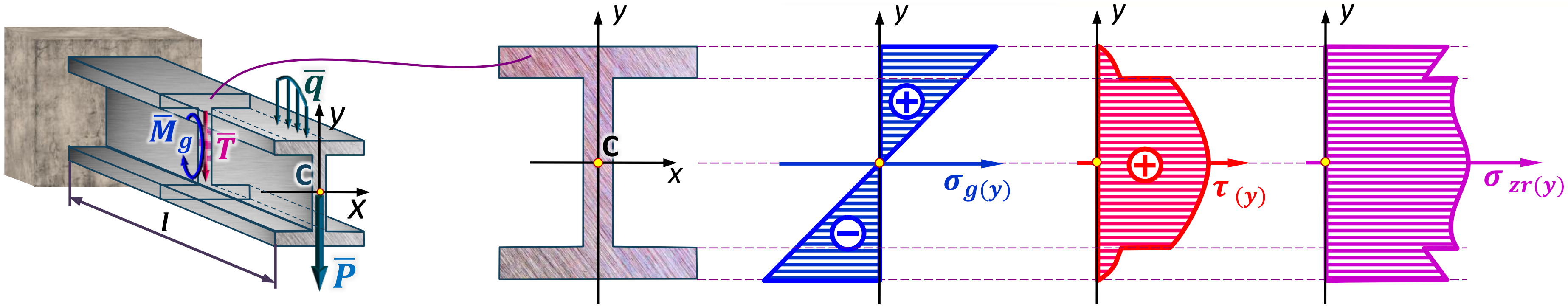
$$S_{x(y)}=\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{h}{2}-y\right)\cdot\left(\frac{h}{2}+y\right)=\boxed{\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)}$$

$$\tau_{(y)}=\frac{T\cdot\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)}{\frac{b\cdot h^3}{12}\cdot b}=\frac{6T\cdot\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)}{b\cdot h^3}=6\overbrace{\boxed{\frac{T}{bh}}}^{\tau_{śr}}\left(\frac{1}{4}-\frac{y^2}{h^2}\right)$$

$$\boxed{\tau_{(y)}=\frac{3}{2}\tau_{śr}\left(1-\frac{(2y)^2}{h^2}\right)}\;\Rightarrow$$

$$\tau_{min}=\tau_{\left(y=\frac{h}{2}\right)}=0;\qquad \tau_{max}=\tau_{(y=0)}=\frac{3}{2}\tau_{śr}=\frac{3}{2}\frac{T}{bh}$$

3.4. Naprężenia zredukowane przy zginaniu ze ścinaniem



Naprężenia zredukowane ($\sigma_{zr(y)}$) w przypadku zginania ze ścinaniem oblicza się dla danej współrzędnej przekroju (*y*) jak dla płaskiego stanu naprężenia opisanego wartościami naprężeń normalnych ($\sigma_{g(y)}$) i stycznych ($\tau_{(y)}$), stosując wybraną hipotezę wytężeniową, jak np.:

- **hipotezę Coulomba (τ_{max}, C-T-G):** $$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$
- **hipotezę Hubera (H-M-H):** $$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Wnioski:

① w skrajnych warstwach belki (τ=0, σ_g=max) naprężenia zredukowane odpowiadają wartości naprężeń normalnych ($\sigma_{zr}=|\sigma_g|$),

② wykres naprężeń zredukowanych charakteryzuje się nieciągłością we współrzędnych, w których następuje skokowa zmiana naprężeń stycznych w związku ze zmianą szerokości przekroju,

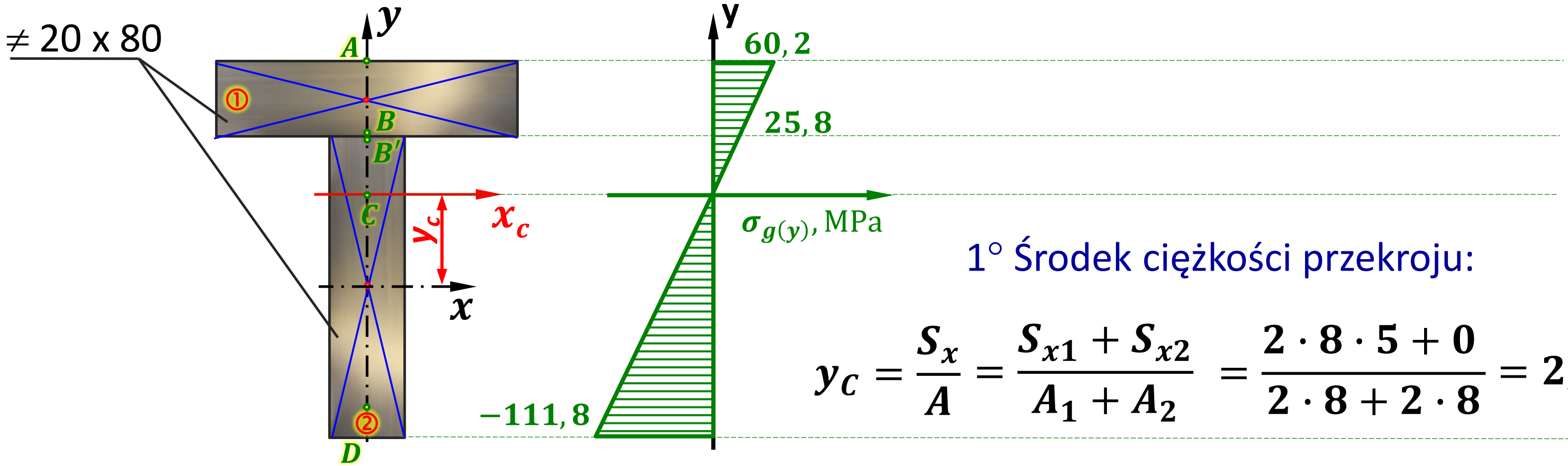
③ na osi obojętnej naprężenia zredukowane odpowiadają przypadkowi czystego zginania (τ=max, σ_g=0) i w szczególności wynoszą: $\sigma_{zr} = \sqrt{3}\tau$ – wg hip. Hubera, lub $\sigma_{zr} = 2\tau$ – wg hip. Coulomba.

Przykład 3.2:

Wyznaczyć rozkłady: (1) naprężeń normalnych, (2) naprężeń stycznych i (3) naprężeń zredukowanych wg hip. Hubera w przekroju poprzecznym belki o kształcie jak na rysunku, w którym działa moment gnący M_g=5 kNm i siła poprzeczna T=100 kN.

Dane: $\boldsymbol{T}$**=100 kN,** $\boldsymbol{M_g}$**=5 kNm**

Szukane: $\sigma_{g(y)}$, $\tau_{(y)}$, $\sigma_{zr(y)}$



1° Środek ciężkości przekroju:

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{S_{x1} + S_{x2}}{A_1 + A_2} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 5 + 0}{2 \cdot 8 + 2 \cdot 8} = 2,5\ cm = \mathbf{25\ mm}$$

2° Główny centralny moment bezwładności:

$$J_{xc} = J_{xc①} + J_{xc②} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot (5 - 2,5)^2 + \frac{2 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot 8 \cdot 2,5^2 = 290{,}6667\ cm^4 = \mathbf{2\,906\,667\ mm^4}$$

3° Naprężenia normalne $\sigma_{g(y)}$ w punkach charakterystycznych:

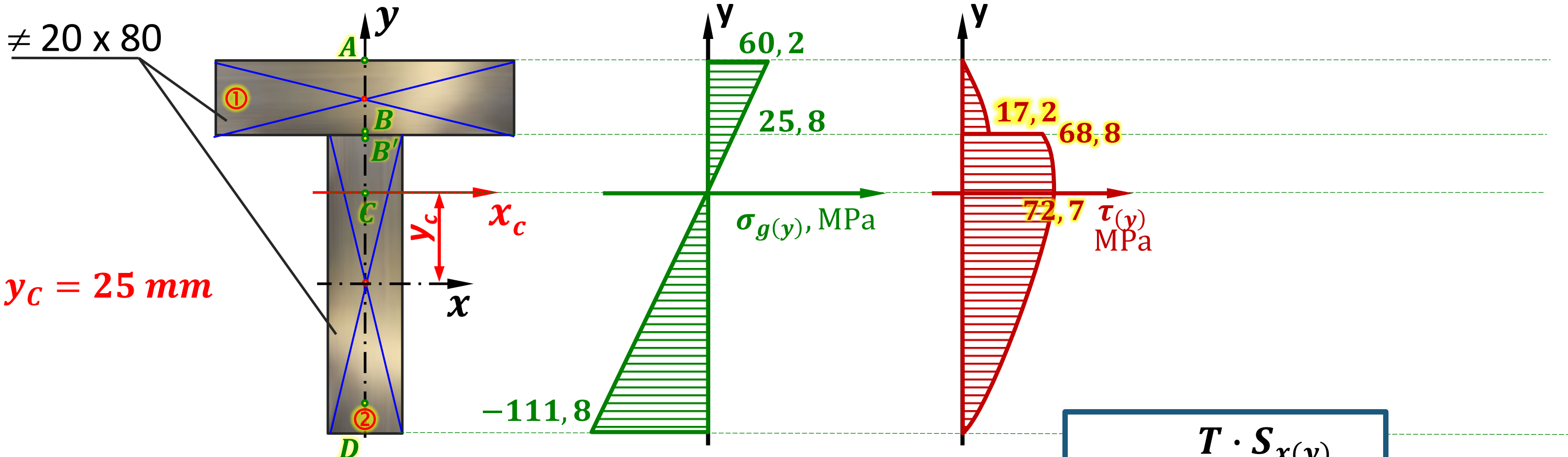
$$\sigma_{gA} = \frac{M_g}{J_{xc}} y_A = \frac{5 \cdot 10^6}{2\,906\,667} \cdot 35 = \mathbf{60,2\ MPa} \qquad \sigma_{gD} = \frac{M_g}{J_{xc}} y_D = \frac{5 \cdot 10^6}{2\,906\,667} \cdot (-65) = \mathbf{-111,8\ MPa}$$

$$\sigma_{gB} = \sigma_{gB'} = \frac{M_g}{J_{xc}} y_B = \frac{5 \cdot 10^6}{2\,906\,667} \cdot 15 = \mathbf{25,8\ MPa} \qquad \sigma_{gC} = 0$$

Przykład 3.2:

Wyznaczyć rozkłady: (1) naprężeń normalnych, (2) naprężeń stycznych i (3) naprężeń zredukowanych wg hip. Hubera w przekroju poprzecznym belki o kształcie jak na rysunku, w którym działa moment gnący M_g=5 kNm i siła poprzeczna T=100 kN.

Dane: **T=100 kN, M_g=5 kNm** Szukane: $\sigma_{g(y)}$, $\tau_{(y)}$, $\sigma_{zr(y)}$ $J_{xc} = 2\,906\,667\ mm^4$



$$\tau_{(y)} = \frac{T \cdot S_{x(y)}}{J_x \cdot b_{(y)}}$$

4° Naprężenia styczne $\tau_{(y)}$ w punkach charakterystycznych:

A: $S_{x(yA)} = 0 \Rightarrow \tau_A = 0$ **D:** $S_{x(yD)} = 0 \Rightarrow \tau_D = 0$

B: $S_{x(yB)} = 20 \cdot 80 \cdot 25 = 4 \cdot 10^4\ mm^3$, $b_{(yB)} = 80\ mm \Rightarrow \tau_B = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^4}{2906667 \cdot 80} = 17,2\ \mathrm{MPa}$

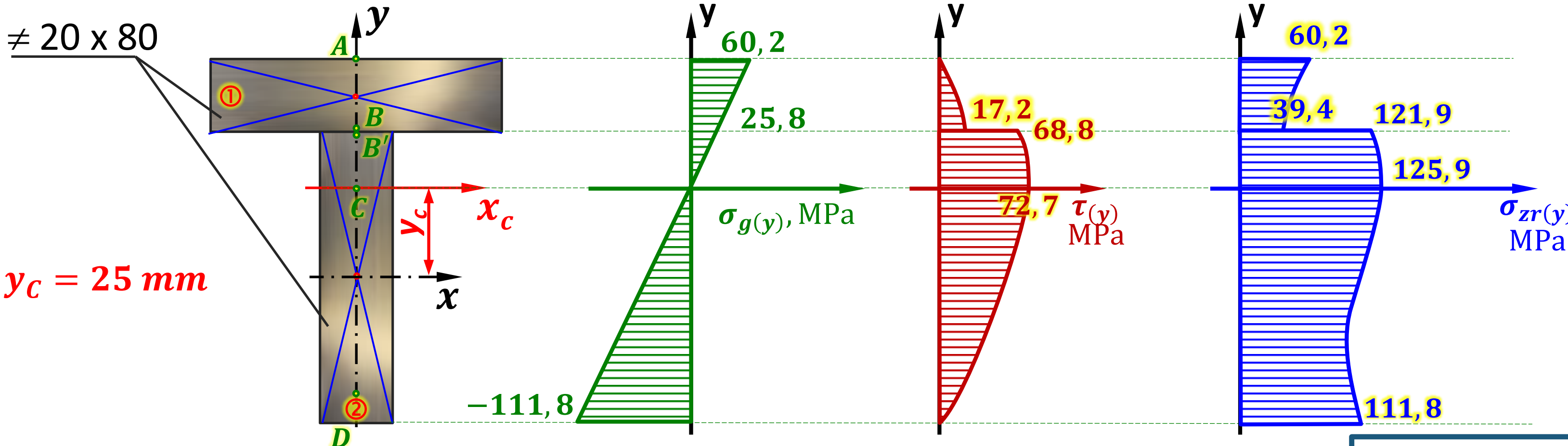
B′: $S_{x(yB')} = S_{x(yB)} = 4 \cdot 10^4\ mm^3$, $b_{(yB')} = 20\ mm \Rightarrow \tau_{B'} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^4}{2906667 \cdot 20} = 68,8\ \mathrm{MPa}$

C: $S_{x(yC)} = 4 \cdot 10^4 + 20 \cdot 15 \cdot 7,5 = 42250\ mm^3$, $b_{(yC)} = 20\ mm \Rightarrow \tau_C = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 42250}{2906667 \cdot 20} = 72,7\ \mathrm{MPa}$

Przykład 3.2:

Wyznaczyć rozkłady: (1) naprężeń normalnych, (2) naprężeń stycznych i (3) naprężeń zredukowanych wg hip. Hubera w przekroju poprzecznym belki o kształcie jak na rysunku, w którym działa moment gnący M_g=5 kNm i siła poprzeczna T=100 kN.

Dane: **T=100 kN, M_g=5 kNm** Szukane: $\sigma_{g(y)}$, $\tau_{(y)}$, $\sigma_{zr(y)}$ $J_{xc} = 2\,906\,667\ mm^4$



4° Naprężenia zredukowane $\sigma_{zr(y)}$ w punkach charakterystycznych (hip. Hubera):

$$\boxed{\sigma_{zr(y)} = \sqrt{\sigma_{g(y)}^2 + 3\tau_{(y)}^2}}$$

A: $\sigma_{zr(A)} = \sqrt{60.2^2 + 3\cdot 0^2} = 60,2\ \mathrm{MPa}$

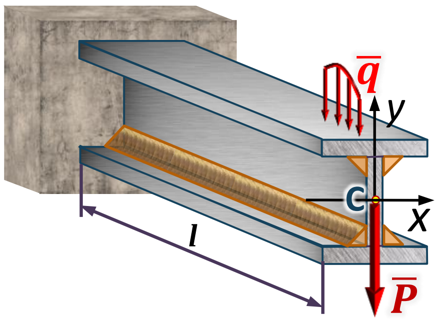
B: $\sigma_{zr(B)} = \sqrt{25.8^2 + 3\cdot 17,2^2} = 39,4\ \mathrm{MPa}$

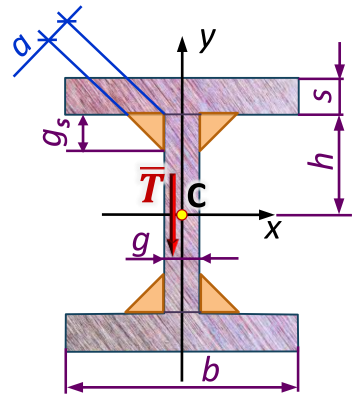
B': $\sigma_{zr(B')} = \sqrt{25.8^2 + 3\cdot 68,8^2} = 121,9\ \mathrm{MPa}$

C: $\sigma_{zr(C)} = \sqrt{0^2 + 3\cdot 72,7^2} = 125,9\ \mathrm{MPa}$

D: $\sigma_{zr(A)} = \sqrt{111.8^2 + 3\cdot 0^2} = 111,8\ \mathrm{MPa}$

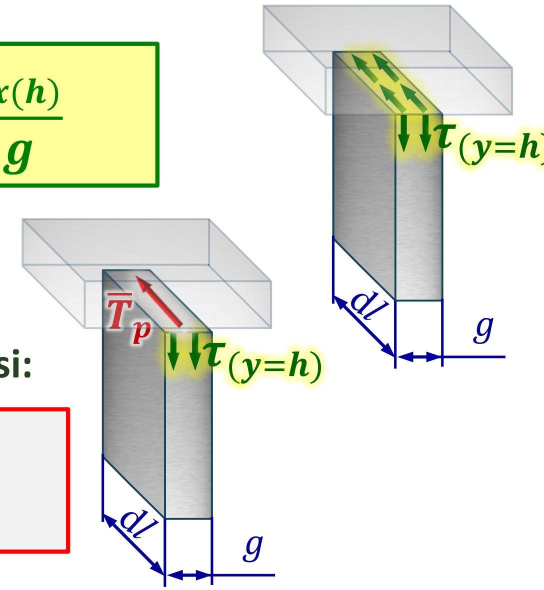
3.6. Obliczenia wytrzymałościowe spoin wzdłużnych





Naprężenia styczne w warstwie pod półką w belce litej wynosiłyby:

$$\tau_{(y=h)} = \frac{T \cdot S_{x(h)}}{J_x \cdot g}$$



Zatem siła tnąca w warstwie pod półką przypadająca na odcinek d*l* wynosi:

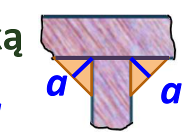
$$T_p = \tau_{(y=h)} \cdot g \cdot dl \Rightarrow \boxed{T_p = \frac{T \cdot S_{x(h)} \cdot dl}{J_x}}$$

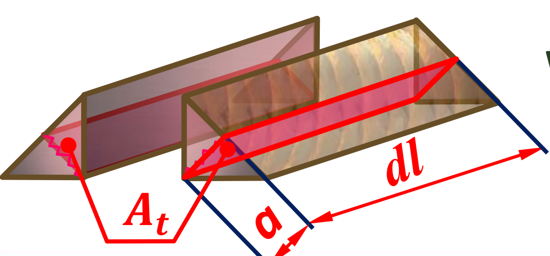
W belce spawanej siła ta przypada na odcinek spoiny o łącznym przekroju A_t wywołując w niej naprężenia:

$$\tau_s = \frac{T_p}{A_t} = \frac{T \cdot S_{x(h)} \cdot dl}{J_x \cdot dl \cdot a_c} \Rightarrow \boxed{\tau_s = \frac{T \cdot S_{x(h)}}{J_x \cdot a_{cp}}}$$

gdzie: a_{cp} – całkowita grubość spoiny pod półką

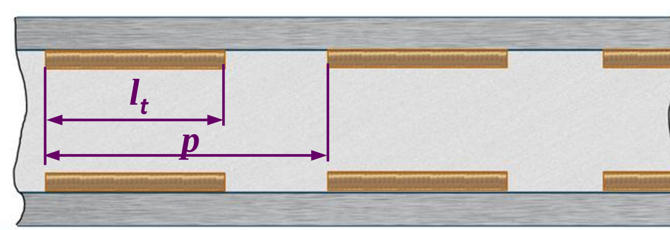
dla dwuteownika jak na rysunku: $a_{cp}=2a$





W przypadku spoin przerywanych:

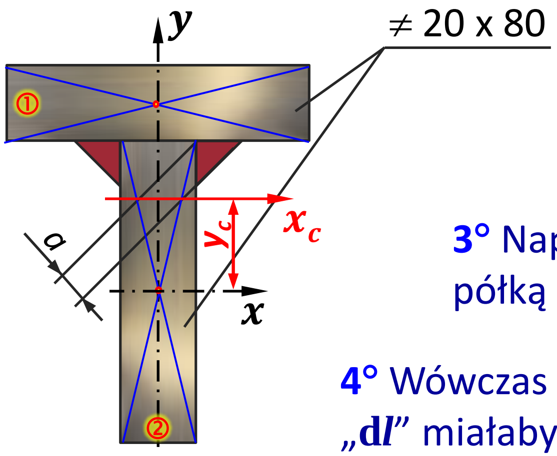
$$\boxed{\tau_s = \frac{T \cdot S_{x(h)}}{J_x \cdot a_{cp}} \cdot \frac{p}{l_t}}$$



Przykład 3.3:

Obliczyć wymaganą grubość spoiny (a) łączącej półkę ze środnikiem w belce o przekroju jak na rysunku, jeśli maksymalna działająca na nią siła poprzeczna wynosi T=93 kN.

Dane: **T=93 kN, k_{ts}=80 MPa** Szukane: a=?



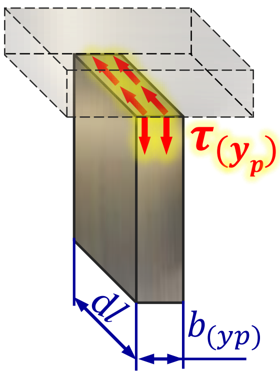
1° Środek ciężkości przekroju: $y_C = 25\ mm$ (por. przykład 3.2)

2° Główny centralny moment bezwładności:

$$J_{xc} = J_{xc①} + J_{xc②} = 2\,906\,667\ mm^4$$ (por. przykład 3.2)

3° Naprężenia styczne w warstwie pod półką (y_p=15 mm) w belce litej wynosiłyby:

$$\boxed{\tau_{(yp)} = \frac{T \cdot S_{x(yp)}}{J_x \cdot b_{(yp)}}}$$



4° Wówczas siła tnąca przypadająca na odcinek długości „dl" miałaby wartość:

$$T_{(yp)} = \tau_{(yp)} \cdot b_{(yp)} \cdot dl = \frac{T \cdot S_{x(yp)} \cdot dl}{J_x}$$

5° W belce spawanej siła ta przypada na odcinek spoiny o łącznym przekroju **2A=2a·dl**, wywołując w niej naprężenia:

$$\tau_s = \frac{T_{(yp)}}{2a \cdot dl} = \frac{T \cdot S_{x(yp)}}{J_x \cdot 2 \cdot a} \le k_s$$

6° Moment statyczny półki: $S_{x(yp)} = 20 \cdot 80 \cdot 25 = 4 \cdot 10^4\ mm^3$

5°, 2°, 6° ⇒

$$a \ge \frac{T \cdot S_{x(yp)}}{J_x \cdot 2 \cdot k_s} = \frac{93000 \cdot 4 \cdot 10^4}{2906667 \cdot 2 \cdot 80} \Rightarrow \boxed{a \ge 8\ mm}$$